Решение задачи дня от 19.01.2022

Найдите значение выражения

$$5^{log_{25}\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}+8^{log_{64}\left(3-4\sqrt{x-1}+x\right)}$$

при $x=2{,}1$

Рассмотрим решение задачи

Заметим, что каждое слагаемое похоже на основное логарифмическое тождество

$5^{log_{25}\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}=5^{log_{5^2}\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}=$	Стремимся к формуле основного логарифмического тождества $\boldsymbol{a^{log_a b}=b}$
$=5^{\frac{1}{2}log_5\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}=$	Применим формулу $\boldsymbol{log_{a^r}b=\frac{1}{r}\cdot log_a b}$
$=5^{log_5\left(x-2\sqrt{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}}=$	Применим формулу $\boldsymbol{r\cdot log_a b=log_a b^r}$
$=5^{log_5\sqrt{\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}}=$	По определению логарифма его аргумент $\left(x-2\sqrt{x-1}\right)>0$, то верно равенство $\boldsymbol{a>0, a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}}$
$=\sqrt{\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}$	Избавиться от корня квадратного возможно двумя способами $\boldsymbol{\left(\sqrt{a}\right)^2=a}$, если $\boldsymbol{a\geq 0}$ или $\boldsymbol{\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert}$.
$x-2\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2\sqrt{x-1}+1$ $=\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2$	Рассмотрим подкоренное выражение, попробуем привести его к квадрату разности $\boldsymbol{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$
$=\sqrt{\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}$ $=\left\lvert\sqrt{x-1}-1\right\rvert$	Применим формулу $\boldsymbol{\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert}$
$\sqrt{2{,}1-1}-1=\sqrt{1{,}1}-1>0$	Учитывая, что $x=2{,}1$, то подмодульное выражение имеет положительное значение
$\left\lvert\sqrt{x-1}-1\right\rvert=\sqrt{x-1}-1$	Зная, что подмодульное выражение положительно, то по определению модуля $\lvert a\rvert=\begin{cases}a, \text{если } a\geq 0,\\ -a, \text{если } a<0\end{cases}$ раскроем модуль
$8^{log_{64}\left(3-4\sqrt{x-1}+x\right)}=8^{log_8\left\lvert\sqrt{x-1}-2\right\rvert}$ $=\left\lvert\sqrt{x-1}-2\right\rvert=2-\sqrt{x-1}$	Второе слагаемое преобразуем потому же принципу
$5^{log_{25}\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}+8^{log_{64}\left(3-4\sqrt{x-1}+x\right)}=\sqrt{x-1}-1+2-\sqrt{x-1}=1$	